

26. Derivace funkce

Osnova: Derivace funkce v bodě a a na množině, geometrický význam derivace, věty pro počítání derivací, derivace elementárních funkcí, rovnice tečny a normály, věty o derivaci a spojitosti; derivace vyšších řádů, derivace složené a inverzní funkce, derivace funkce dané implicitně, derivace typu $y = [f(x)]^{g(x)}$.

SÚM 298/33cef + funkce $y = \sin x$, ($y = \cos x$), 36eg, 40, 42c(e), 46d, 47c, 48de, 49a, 52de, 61df(g), 69, 70ac(d), 74, 77; 313/128a(b); 324/166ad, 169ab(c)

Př.: Derivujte a upravte:

a) $y = x^{\sin x}$ (b) $y = x^{\cos x}$ c) $y = (x^2 + x + 1)^{3x}$ d) $y = x^x$ e*) $y = x^{x^x}$

[nutno nejdříve upravit $y = [f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ a potom derivovat jako složenou funkci]

L'Hospitalovo pravidlo

Př.: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$

b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{x} \right)^{x^2}, a \neq 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$

i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (tg x)^{2x - \pi}$

[a) 1, b) $2/3a \exp(-1/6)$, c) 0, d) 1, e) $1/3$, f) 1, g) 1, h) $e \exp(-a^2/2)$, i) 1

Neurčité výrazy typu $0^0, \infty^0, 1^\infty$ se také řeší pomocí výše uvedené úpravy:

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \ln f(x)}$, a tak se tyto neurčité výrazy převedou na neurčitý výraz typu $0 \cdot \infty$]